SOLUCIÓ

NOM:_____ COGNOM:_____

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

Problema 1 (Bloc C)

Una empresa constructora està avaluant la resistència a la tracció de dues marques diferents de barres d'acer (**M1** i **M2**) que es fan servir per reforçar els pilars d'un nou pont. Per a cada marca, s'han realitzat proves abans (A) i després (D) d'un procés d'enduriment tèrmic, mesurant la resistència mitjana en MPa (Megapascals).
S'han recollit dades de N=20 mostres per a cada condició i marca. Els resultats de la resistència mesurada són:

Marca	Condició	N	$\sum X_i$	$\sum(X_i^2)$
M1	Abans Enduriment (A)	20	11.200	6.280.000
M2	Abans Enduriment (A)	20	11.400	6.510.000
M1	Després Enduriment (D)	20	11.800	7.025.000
M2	Després Enduriment (D)	20	12.200	7.500.000

Noteu que el punt indica milers, no decimals. Així, el primer valor del sumatori de la taula es onze mil dos-cents.

1. **(1 punt)** Doneu una estimació puntual de la mitjana de la resistència abans de l'enduriment (A) per a la marca M2. Quin és l'error estàndard d'aquesta estimació?

   Estimació Puntual de la Mitjana de A per a M2 Abans= 11.400/20 = 570 MPa

   Pel càlcul de l'Error Estàndard de l'Estimació (EE):

   Desviació Estàndard de la mostra de A per a M2 Abans: s^2= (6.510.000 – ((11400^2)/20))/19 = 631,58

   s= sqrt(631.58)= 25.1312 (approx.)

   EE = s\sqrt(N) =25.1312\sqrt(20)=5.620 (approx.)

2. **(1 punt)** Calculeu un interval de confiança (IC) del 99% per a la mitjana de la resistència de la marca M1 Després de l'enduriment (D), suposant una desviació poblacional (σ) de 100 MPa.

   Pel càlcul de l'Interval de Confiança del 99% per a la Mitjana de M1, Despres amb sigma coneguda:

   Mitjana de M1 Despres=11.800/20 = 590 MPa.

   N = 20, sigma = 100. Utilitzem $z_{0.995}$=2.576.

   Fórmula IC amb sigma coneguda:

   $$IC = 590 \pm 2,576 \cdot \frac{100}{\sqrt{20}} = 590 \pm 2,576 \cdot 22,36 = 590 \pm 57,6$$

   IC = [532,4; 647,6]

3. **(1 punt)** Esmenteu i expliqueu breument dues maneres d'obtenir un interval de confiança més estret (més precís) per a la mitjana poblacional.

   • Augmentar la grandària de la mostra (n): En dividir per un nombre més gran (sqrt(n)), l'Error Estàndard disminueix i l'interval es fa més estret.

   • Disminuir el nivell de confiança (1-alpha): Si passem del 99% al 90%, el valor crític (z o t) serà més petit, reduint el marge d'error.

   Nota: "disminuir la desviació típica" no seria una resposta acceptable, a no ser que es digui que s'ha aconseguit eliminar error de mesura o, per exemple, fer un disseny amb dades aparellades, que pot baixar la desviació de la resposta.

4. **(1.5 punt)** L'IC del 90% per a la mitjana de resistència amb **σ** desconeguda per a M1 Abans de l'enduriment és [552, 568] amb N=20 observacions. Si s'augmenta la mostra a 80 observacions (N=80), quin seria l'interval de confiança del 90% assumint que no canvia la mitjana ni la desviació mostral es mantenen amb el canvi de tamany mostral? Com ha canviat i per què?

   IC Original (N=20): [552, 568]; Centre: 560. Amplada: 16.

   Factor d'augment: La mostra es multiplica per 4 (80/20 = 4).

   Efecte en l'amplada: L'amplada és inversament proporcional a sqrt(n). Si n es multiplica per 4, l'amplada es divideix per sqrt(4) = 2.

   Nou càlcul: Nova amplada approx. 16 / 2 = 8. L'interval segueix centrat en 560.

   Nou IC Aproximat: 560+-4 =[556; 564].

   L'interval es més petit, ja que l'augment de la informació (mida mostral, n) redueix la incertesa (error estàndard) a la meitat.

   NOTA: el resultat assumeix que el quantil de la t amb 79 graus de llibertat no canvia però en realitat és menor i l'interval seria encara més estret. Una altra opció de càlcul seria fent l'aproximació del quantil de la t amb el de la z (1.645), que també és una solució acceptable.

   Aproximació a la distribució normal, calculem l'IC així: 560±1.645*2.2942=[556.23; 563.77]

5. **(1.5 punts)** La normativa d'enginyeria exigeix que la resistència sigui superior a 600 MPa. En un nou assaig amb 400 barres de la marca M2 Abans (A), **48 barres no van superar els 600 MPa**. Calculeu i interpreteu un **IC del 95%** pel paràmetre que estima la proporció de barres que **no compleixen** el requisit mínim de resistència.

   Proporció de Barres que No Compleixen

   Proporció ($\hat{p}$): $48/400 = 0,12$ (el 12% no compleix).

   Error Estàndard: $\sqrt{\frac{0,12 \cdot 0,88}{400}} = \sqrt{0,000264} \approx 0,01625.$

   Valor crític (95%): $z_{0.975} = 1,960.$

   IC: $0,12 \pm 1,960 \cdot 0,01625 = 0,12 \pm 0,0318.$

   Resultat: $[\mathbf{0,0882, 0,1518}]$ o $[8,82\%, 15,18\%]$.

   Interpretació: Amb una confiança del 95%, la veritable proporció poblacional de barres M2 (Abans) que no compleixen la resistència mínima de 600 MPa se situa entre el 8.82% i el 15.18%.

6. **(1 punt)** Amb l'objectiu d'estimar l'efecte mitjà en la resistència de la marca **M1** del procés de l'enduriment (comparat amb barres sense tractament tèrmic), argumenteu quines característiques ha de tenir el disseny de recollida de les dades 1) si es fa com a mostres **aparellades,** i 2) si es fa com a mostres **independents**.

   Aparellades: Primer es selecciona a l'atzar un conjunt de barres M1 sense tractar, i es mesura la seva resistència. A continuació es sotmet cada barra al procés d'enduriment, i es torna a mesurar cada barra. Hem d'identificar cada barra per poder realitzar les parelles de forma coherent. L'aparellament minimitzaria la variabilitat deguda a factors de procés externs.

   Independents: En aquest cas també es selecciona un conjunt de barres a l'atzar, però es separen, també aleatòriament, de manera que una part d'aquestes barres es mesuren sense tractar, i les altres primer es tracten i després es mesura la resistència.

7. **(1 punt)** A partir només de la següent sortida del programari R, que compara la resistència **Després menys la resistència Abans (D−A)** per a la marca M1, calculeu un **interval de confiança del 90%** per a la diferència de resistències esperades.

```
Paired t-test data:
M1_despres(D) and M1_abans(A)
 t = 4.000, df = 19, p-value = 0.00075
alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
...
mean difference: 30
```

Segons la taula inicial M1_D te valor 590 i M1_A 560. La diferencia M1_D - M1_A=30. Tambe es veu a la sortida de R (mean difference: 30)

Dades: $\bar{d} = 30, t = 4,000.$

Error Estàndard (EE): Sabem que $t = \bar{d}/EE$, per tant $EE = 30/4,000 = 7,5.$

Valor crític (90%, df=19): $t_{0.95,19} = 1,729.$

IC: $30 \pm 1,729 \cdot 7,5 = 30 \pm 12,97.$

Resultat: [17,03; 42,97]

8. **(1 punts)** Calculeu un **interval de confiança del 95%** per a la **diferència de mitjanes de resistència Després de l'enduriment entre M2 i M1 ($\mu_{D,\,M2} - \mu_{D,\,M1}$)**, assumint **variàncies desconegudes però idèntiques**. Interpreteu l'interval i argumenteu si podem concloure que la resistència mitjana de les dues marques és diferent després de l'enduriment (quantificant la diferència si en tenen).

Mitjanes: $\bar{X}_{M2} = 610$, $\bar{X}_{M1} = 590$. Diferència = 20.

Variàncies (s^2):

- $s^2_{M2} = 3052,63$
- $s^2_{M1} = 3315,79$

Variància Agrupada (s_p^2): Com que $n_1 = n_2 = 20$, és la mitjana aritmètica:

$$s_p^2 = \frac{3052,63 + 3315,79}{2} = 3184,21$$

Error Estàndard Combinat:

$$EE = \sqrt{3184,21\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right)} = \sqrt{3184,21 \cdot 0,1} = 17,844$$

Valor Crític (df=38, 95%): $t_{0.975,38} = 2,024.$

Càlcul IC:

$$20 \pm 2,024 \cdot 17,844 = 20 \pm 36,12$$

IC=[-16.12; 56.12]

L'interval de confiança del 95% per a la diferència de resistències $mu_{D,\,M2}$ - $mu_{D,\,M1}$ és [-16.12, 56.12] MPa.
Com que l'interval conté el zero (0), no podem concloure que la resistència mitjana de M2 sigui significativament diferent de la de M1 amb un 95% de confiança. La diferència, si existeix, pot ser d'entre -16.12 MPa (M1 més resistent) i +56.12 MPa (M2 més resistent).

9. **(1 punt)** Trobeu la **grandària mostral** necessària per a què l'anterior interval de confiança del 95% tingui una **amplada de 50 MPa**, assumint que la σ comuna als 2 grups és **200 MPa** i que volem el mateix nombre de mostres a cada grup ($n_{M1} = n_{M2} = n$); *Nota: feu servir el model de la distribució normal*.

Dades: Amplada = 50 → Marge d'Error (E) = 25. $\sigma = 200$. $z_{0,975} = 1,960.$

Fórmula (diferència de mitjanes, n iguals):

$$n = \frac{2 \cdot (z_{\alpha/2})^2 \cdot \sigma^2}{E^2}$$

Càlcul:

$$n = \frac{2 \cdot (1,960)^2 \cdot 200^2}{25^2} = \frac{2 \cdot 3,8416 \cdot 40.000}{625} = \frac{307.328}{625} = 491,72$$

Conclusió: Es necessita una grandària mostral de 492 observacions a cada grup n_M1=492 i n_M2=492 per garantir una amplada d'IC de 50 MPa. NOTA: s'ha d'arrodonir cap amunt.

Valors de Referència

$z_{0.9}$ = 1.282; $z_{0.95}$ = 1.645; $z_{0.975}$ = 1.960; $z_{0.99}$ = 2.326; $z_{0.995}$=2.576; $t_{0.9,\,18}$= 1.330; $t_{0.95,\,18}$=1.734; $t_{0.975,\,18}$= 2.101; $t_{0.9,\,19}$= 1.328; $t_{0.95,\,19}$=1.729; $t_{0.975,\,19}$= 2.093; $t_{0.9,\,38}$= 1.304; $t_{0.950,\,38}$= 1.686; $t_{0.975,\,38}$= 2.024; $t_{0.9,\,39}$= 1.304; $t_{0.950,\,39}$= 1.685; $t_{0.975,\,39}$= 2.023

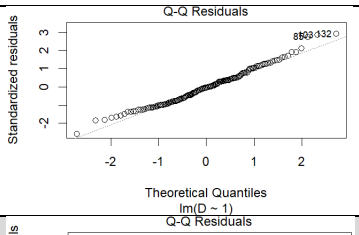
NOM:_____ COGNOMS:_____

PE Q1 2025/26. 22 de desembre 2025. *Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu/justifiqueu els càlculs.*

Problema 2. Bloc D. Per estudiar quins factors influeixen en el rendiment de models de classificació basats en IA, s'han recollit dades de 150 projectes de programari. Per a cada projecte s'han mesurat tres variables: 1) ***hores_codi*** (núm. hores setmanals dedicades a programar); 2) ***assistentIA*** (si l'equip ha utilitzat o no un assistent de codi basat en IA: Si/No); 3) ***anys_exp*** (anys d'experiència mitjana de l'equip de desenvolupament). Tenim també 2 variables respostes: ***acc1*** i ***acc2*** que són les precisions (en percentatge) del model abans i després d'introduir una millora respectivament. Finalment s'han creat dues variables: **D** (=acc2 - acc1) i **log_D** (=log(acc2) - log(acc1)). S'han ajustat els següents models

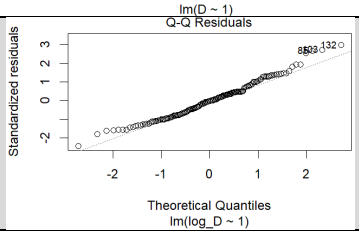
Model 1

```
Call: lm(formula = D ~ 1, data = dades)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.1051     0.6095   1.813   0.0718 .
---
Residual standard error: 7.465 on 149 degrees of
freedom
```



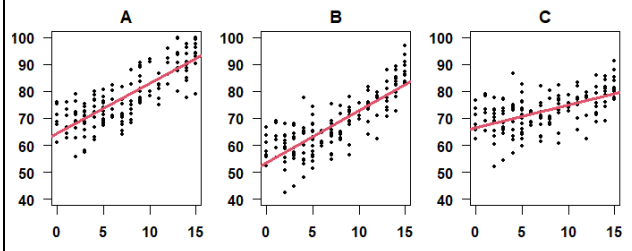
Model 2

```
Call: lm(formula = log_D ~ 1, data = dades)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.015861   [redacted]    2.000   0.0463 *
---
Residual standard error: 0.0967 on 149 degrees of
freedom
```



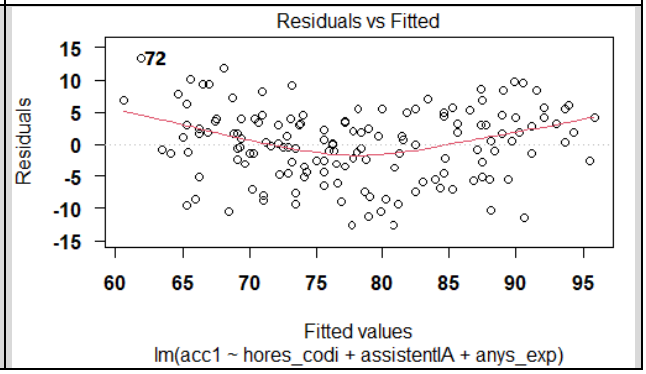
Model 3

```
Call: lm(formula = acc1 ~ hores_codi, data = dades)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  64.5542     0.9509   67.89   <2e-16 ***
hores_codi    1.8305     0.1102   16.62   <2e-16 ***
---
Residual standard error: 6.115 on 148 degrees of
freedom
Multiple R-squared:  0.6511,  Adjusted      R-squared:
0.6487
F-statistic: 276.2 on 1 and 148 DF,  p-value: < 2.2e-
16
```



Model 4

```
Call: lm(formula = acc1 ~ hores_codi + assistentIA +
anys_exp, data = dades)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    60.3402     1.2867  46.897  < 2e-16 ***
hores_codi      1.8687     0.1024  18.254  < 2e-16 ***
assistentIASi   4.2960     0.9257   4.641 7.65e-06 ***
anys_exp        0.3196     0.1443   2.215   0.0283 *
---
Residual standard error: 5.616 on 146 degrees of
freedom
Multiple R-squared:  0.7097,  Adjusted      R-squared:
0.7037
F-statistic: 118.9 on 3 and 146 DF,  p-value: < 2.2e-
16
```



1. Emprant els models disponibles, digueu quines són les estimacions puntual per la <u>diferència</u> (D) i pel <u>rati</u> (R) de mitjanes de la precisió entre abans i després de la millora.
   (Model 1) → $\hat{\mu}_D = \bar{y}_D = \mathbf{1.1051}$
   (Model 2) → $\hat{\mu}_R = \exp(0.015861) = \mathbf{1.016}$

2. Emprant els models disponibles, calculeu un interval de confiança (IC) del 95% per la diferència de precisió abans i després de la millora.
   $$IC(\mu_D, 95\%) = \bar{y}_D \pm t_{149,0.975} \cdot se = 1.1051 \pm 1.976 \cdot 0.6095 = [\mathbf{-0.099}, \mathbf{2.309}]$$

3. Calculeu l'error estàndard del coeficient del model 2
   $$se = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.0967}{\sqrt{150}} = \mathbf{0.0079}$$

4. Digueu quina o quines premisses s'avaluen en els gràfics associats als models 1 i 2 i basant-te en aquesta gràfics, comenteu si es compleixen aquesta o aquestes premisses.
   En aquests gràfics s'està avaluant la premissa de **Normalitat** dels residus (en aquest cas, equivalent a la Normalitat de la variable resposta). Es veu com **ambdos models compleixen aquesta premissa**.

5. Segons el model 3, calculeu un interval de confiança del 99% pel canvi esperat en la precisió abans de la millora si reduim en 2 hores el temps de programació. Interpreta'l.

$$IC(\mu_{acc1,h-2} - \mu_{acc1,h}, 99\%) = -2 \cdot \left(\hat{\beta}_{hores_{codi}} \pm t_{148,0.995} \cdot se_{\hat{\beta}_{hores_{codi}}}\right) = -2 \cdot (1.83 \pm 2.61 \cdot 0.1102)$$
$$= [\mathbf{-4.24}, \mathbf{-3.09}]$$

Un decrement de 2 hores en el temps de programació s'associa amb un decrement de la precisió d'entre 3.09 i 4.24 punts en mitjana.

6. Els 3 gràfics associats al model 3 representen la precisió abans de la millora (eix vertical) en funció de les hores de programació (eix horitzontal). Basant-te en la informació del model 3, digueu quins del gràfics (A, B o C) representa les dades reals. Argumenteu la resposta.

El gràfic A ja que és l'únic on coincideix el terme constant (64.5) i la pendent (1.83). Pel terme constant, veiem que el gràfic B talla l'eix vertical al voltant de 50 i, per tant, quedaria descartat. Per la pendent, un increment de 15 unitats en les hores de programació (eix horitzontal) hauria de representar un increment en la recta de 27.5 (=15*1.83). Aquest increment es correspon al gràfic A i no al C.

7. S'ha fet una predicció pel Model 4 (*m4*) seguint la següent instrucció. Digueu quins valors haurien d'aparèixer a l'estimació puntual ("2") i al límit inferior de l'interval ("3"), i argumenteu si al requadre "1" s'ha posat "*confidence*" o "*prediction*" (i expliqueu llavors què estem predint).

```
> predict(m4, data.frame(hores_codi=10, assistentIA="Si", anys_exp= 1),
interval = "      1      ")

       fit       lwr       upr
1      2         3     85.47669
```

$\mathbf{2} \rightarrow \hat{y}_4 = 60.3402 + 1.8687 * 10 + 4.2960 + 0.3196 * 1 = \mathbf{83.64}$

$\mathbf{3} \rightarrow lwr_4 = 83.64 - (85.48 - 83.64) = \mathbf{81.80}$

$\mathbf{1} \rightarrow$ "***confidence***". Es tracta d'una predicció del valor esperat de la precisió per als casos amb 10 hores, ús de IA i un any d'experiència. Si fos "*prediction*" en un interval d'una amplada inferior a 4 haurien d'estar contingudes el 95% de les observacions individuals. No pot ser així, i això és pot veure mirant la desviació residual (>5), o mirant el gràfic dels residus on les observacions es mouen en un rang molt més ampli (>20)

8. Digueu el percentatge de variabilitat aproximat que expliquen addicionalment a les hores de programació els factors "ús de l'assistent de IA" i "anys d'experiència" conjuntament.

Expliquen un 5.86% [100*(0.7097 - 0.6511)] que és l'increment aproximat del R^2 entre el model 3 i 4.

9. Digueu quina o quines premisses s'avaluen al gràfic associat al model 4 i argumenteu segons el que es veu si aquesta o aquestes premisses es compleixen i el perquè?

En el gràfic del model 4 es poden avaluar les premisses de **linealitat** i **homoscedasticitat**. La **linealitat** NO es compleix ja que es veu una tendència parabòlica en els punts a mesura que augmentem el valor predit. La **homoscedasticitat** (variància constant) sí que és compleix raonablement.

10. En el gràfic associat al model 4 es veu un punt corresponent al projecte **#72**. Deduïu aproximadament quina va ser la precisió observada per a aquest cas.

Sabem que $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Mirant el gràfic:

$$\left.\begin{matrix} \hat{y}_i \approx 63 \\ e_i \approx 13 \end{matrix}\right\} \rightarrow y_i = e_i + \hat{y}_i \approx \mathbf{76}$$

> qt(0.90,146)[1] 1.287377	> qt(0.95,146)[1] 1.655357	> qt(0.975,146)[1] 1.976346	> qt(0.995,146)[1] 2.609923
> qt(0.90,147)[1] 1.287337	> qt(0.95,147)[1] 1.655285	> qt(0.975,147)[1] 1.976233	> qt(0.995,147)[1] 2.609688
> qt(0.90,148)[1] 1.287298	> qt(0.95,148)[1] 1.655215	> qt(0.975,148)[1] 1.976122	> qt(0.995,148)[1] 2.609456
> qt(0.90,149)[1] 1.287259	> qt(0.95,149)[1] 1.655145	> qt(0.975,149)[1] 1.976013	> qt(0.995,149)[1] 2.609228
> qt(0.90,150)[1] 1.287221	> qt(0.95,150)[1] 1.655076	> qt(0.975,150)[1] 1.975905	> qt(0.995,150)[1] 2.609003
> qnorm(0.90) [1] 1.281552	> qnorm(0.95) [1] 1.644854	> qnorm(0.975) [1] 1.959964	> qnorm(0.995) [1] 2.575829